Električna mjerenja

(pomoćni materijal za predavanja)

Univerzitet Crne Gore

Elektrotehnički fakultet

LITERATURA

- V. Bego, Mjerenja u elektrotehnici, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979
- N. Miljković, Metode i instrumentacija za električna merenja, Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet, 2016
- P. Krčum, Električna mjerenja, Sveučilište u Splitu, 2012
- R. Dragović-Ivanović, Električna mjerenja, Zbirka riješenih zadataka, Univerzitet Crne Gore, 1997
- Predavanja iz predmeta Metrologija električnih veličina, Niš, 2014
- Rico A. R. Picone, Measurement: an introduction, Saint Martin's University, 2017
- John P. Bentley, Principles of Measurement Systems, Pearson Education Limited 1983, 2005

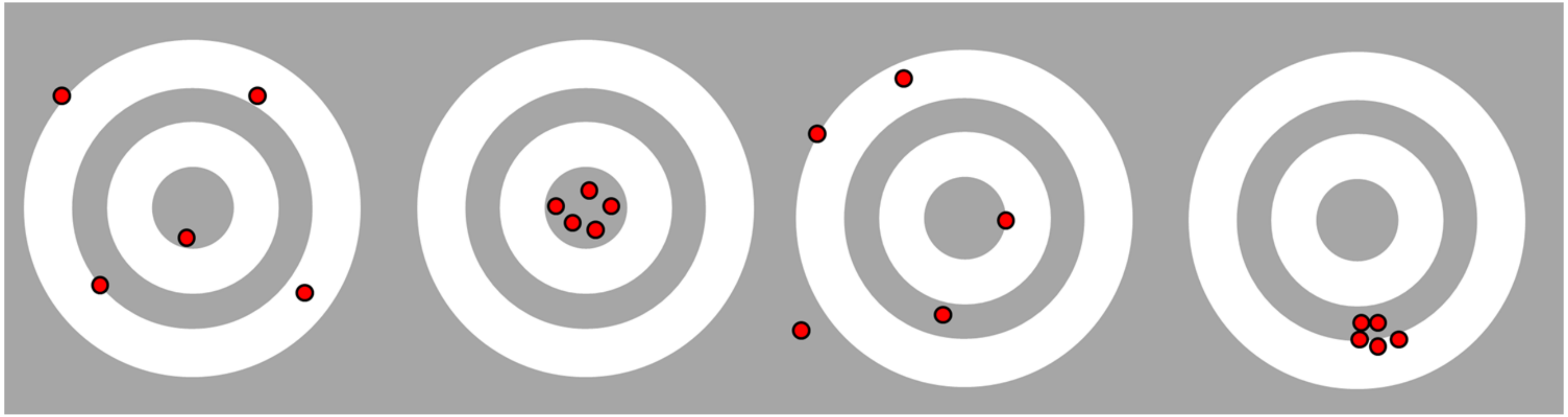
GREŠKE MJERENJA

- Vrijednost fizičke veličine dobijena mjerenjem i iskazana brojem odgovarajućih

jedinica mjera jeste ***rezultat mjerenja***

- Korišćenjem određene mjerne metode potrebno je odrediti ili procijeniti pravu vrijednost neke mjerene veličine pod odredjenim uslovima.
- Medjutim, čak ni uz upotrebu veoma savršenih metoda i uređaja nije moguće dobiti apsolutno tačnu vrijednost, već uvjek postoji veće ili manje odstupanje izmedju prave vrijednosti i izmjerene vrijednosti određene veličine.
- Ova odstupanja izmjerene od prave vrijednosti nazivaju se greške mjerenja. Što je greška mjerenja manja to je sam postupak mjerenja odnosno mjerenje uopšte tačnije.
- Odstupanja od prave vrijednosti nastaju usljed različitih faktora, prije svega usljed nesavršenosti mjerne opreme, neadekvatnosti mjernog postupka, mjernog objekta, uticajne veličine, te lične greške mjeritelja.
- Ovdje treba praviti razliku između dva termina preciznost i tačnost:
  - Tačnost predstavlja bliskost rezultata ispitivanja i usvojene referentne vrijednosti.
  - Preciznost (ISO 5725) je bliskost između rezultata nezavisnih ponavljanja mjerenja u određenim uslovima.

GREŠKE MJERENJA



- Uvedimo ovdje i pojam mjerne nesigurnosti:
  - Precizno i netačno mjerenje karakteriše se malom mjernom nesigurnošću (malo odstupanje između razl. mjerenja), dok je procijenjena vrijednosti daleko od tačne
  - Tačno i precizno mjerenje je najpoželjnija situacija u kojoj je mjerna nesigurnost relativno mala (malo odstupanje između razl. mjerenja), dok je procijenjena tačna vrijednosti relativno dobra

TEORIJA GREŠAKA

- **Da ponovimo: Odstupanje između prave i izmjerene vrijednosti mjerene veličine i predstavlja grešku *mjerenja.***
- **TEORIJA GREŠAKA**: Oblast u okviru metrologije, gdje se izučavaju uzroci nastanka grešaka, vrste grešaka, fizička priroda grešaka i njihove statističke karakteristike, kao i statističke i eksperimentalne metode kojima se procjenjuje najvjerovatnija vrijednost rezultata mjerenja.
- Teorija grešaka se zasniva na aparatu matematičke analize i primjene teorije slučajnih procesa koje se koriste za obradu eksperimentalno prikupljenih odnosno izmjerenih podataka.
- U najvećem broju slučajeva ovi podaci predstavljaju skupove diskretnih vrijednosti rezultata mjerenja odnosno signal mjerenja nad kojim se primjenjuje pomenuta matematička obrada podataka.

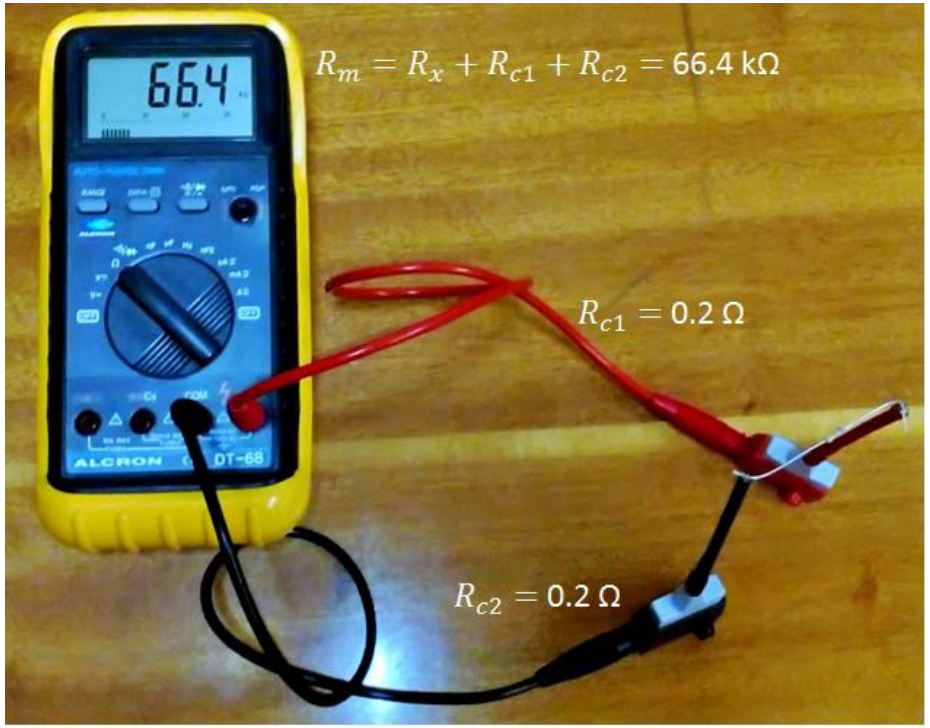
GREŠKE MJERENJA –podjela grešaka

- **Grube greške** nastaju uglavnom kao posljedica nepažnje, previda ili neadekvatnog mjernog postupka odnosno metode, te se usljed ovakvih grešaka rezultati mjerenja najčešće znatno razlikuju po svom iznosu od pravih vrijednosti kao i od ponovljenih mjerenja. T
- Tipičan primjer grube pogreške je očitavanje položaja otklona instrumenta na pogrešnoj mjernoj skali.

- **Sistemske greške** se javljaju na isti način tokom svakog ponavljanja eksperimenta. To znači da sistemska greška uvijek ima isti iznos i predznak.
- Nastaju uglavnom zbog nesavršenosti mjernih uredjaja, mjera (etalona), mjernog postupka, mjernog objekta, uticaja okoline ili pak zbog korišćenje neadekvatnog/nereprezentativnog uzorka.
- Dakle sistemske greške imaju odredjenu vrijednosti odredjeni predznak, pa se mogu uzeti u obzir putem korekcije. Korekcija ima istu apsolutnu vrijednost kao i greška, ali je suprotnog predznaka.

Sistemske greške – ilustracija

- Jedan od najčešćih izvora sistematskih greški prilikom mjerenja je neadekvatna kalibracija instrumenta. Na primjer, ako se za mjerenje otpornosti koristi ommetar, onda kablovi koji se koriste da bi se otpornik doveo na ulaze ommetra imaju neku otpornost koja nije zanemarljiva ($R_c \neq 0$).
- Kako se koriste dva kabla to je izmjerena vrijednost jednaka zbiru $2R_c$ i nepoznate otpornosti otpornika R_x.
- Ilustracija nepravilno kalibrisanog instrumenta za mjerenje otpornosti je predstavljena na slici.



- **Kalibracija predstavlja postupak određivanja relacije između fizičke veličine koja se mjeri i mjernog rezultata (koji je opisan procijenjenom mjerenom vrijednošću i mjernom nesigurnošću).**
- **U slučaju mjerenja nepoznate otpornosti ta relacija je:**

$$R_{mj} = 2R_c + R_x$$

- **Korekcija se može uvesti, ako se kablovi kratko spoje i izračuna otpornost koja se kasnije oduzima od mjerene vrijednosti kako bi se dobila nepoznata otpornost koja nije rezultat sistematske greške.**

GREŠKE MJERENJA –podjela grešaka

- **Slučajne greške** imaju stohastički karakter, nastaju kao rezultat velikog broja slučajnih procesa koji se dešavaju tokom postupka mjerenja.
- Kod ponavljanja mjerenja **slučajne greške** imaju promjenljiv predznak i iznos. Zbog toga što nastaju superpozicijom većeg broja slučajnih procesa, njihov stohastički karakter je najčešće određen normalnom ili Gaussovom raspodjelom gustine vjerovatnoće.
- **Slučajne greške dakle dovode do rasipanja rezultata mjerenja, tj. one čine rezultat nesigurnim.**
- Ovaj tip grešaka je prisutan u svim mjerenjima. Unapređenjem mjernih metoda i instrumenata postiže se sve manji uticaj slučajnih grešaka.
- Uticaj grešaka može se smanjiti primjenom matematičkih odnosno statističkih metoda, koje koriste činjenicu da greške mjerenja imaju slučajni odnosno stohastički karakter. Cilj primjene ovih metoda je obrada skupa rezultata dobijenih ponovljenim mjerenjima, kako bi se procijenila **prava vrijednosti mjerenih veličina kao najvjerovatniji rezultat mjerenja**, **i** **rasipanje izmjerenih vrijednosti oko prave vrijednosti** odnosno oko procijenjenog najvjerovatnijeg rezultata mjerenja

Prikazivanje rezultata mjerenja: tablica ili vektor

- Ponavljanjem eksperimenta mjerenja određene veličine x, dobija se skup podataka koji se obično zapisuje u obliku tabele ili vektora.
- Pojedinačni rezultat mjerenja označavamo sa x_i gdje indeks i označava redni broj mjerenja i može imati vrijednosti od *1* do *n*, pri čemu je ***n* ukupan broj ponovljenih mjerenja.**

I	1	2	3	....	n-1	n
x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_{n-1}	x_n

- U obliku matematičkog vektora podataka, prethodna tabela se može zapisati kao:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)^T$$

APSOLUTNA GREŠKA

- Prema načinu brojnog prikaza, osnovnu grešku instrumenta čine:

Apsolutna, Relativna i Izvedena greška, ili klasa tačnosti instrumenta.

- Apsolutna greška se definiše kao odstupanje između izmjerenog rezultata i prave (tačne) vrijednosti mjerene veličine:

$$\Delta_x = \hat{x} - x_t, \quad \hat{x} - \text{izmjerena vr.} \quad x_t - \text{tačna vr.}$$

- Na primjer, ampermetrom je izmjereno 1,352 A, a prava je vrijednost struje 1,358 A. Tada je apsolutna greška jednaka -0,006 A.
- Apsolutna greška može imati pozitivan ili negativan predznak.
- Posjeduje istu jedinicu kao izmjerena i prava vrijednost mjerene veličine.

APSOLUTNA GREŠKA

- Stvarna vrijednost ostaje nepoznata i nakon mjerenja. Drugim riječima izmjerena vrijednost može samo da se manje ili više približava tačnoj u zavisnosti od uslova.
- Podatak koliko se izmjerena veličina uspješno približava tačnoj vrijednosti izražava se često kao vjerovatnoća da se izmjerena vrijednost nalazi u nekom intervalu širine 2Δ oko tačne vrijednosti:

$$x_t - \Delta \leq \hat{x} \leq x_t + \Delta$$

- Što je interval 2Δ manji to je veći kvalitet mjerenja, i obratno.

- ***Korekcija*** je vrijednost koju treba dodati izmjerenoj vrijednosti kako bi se dobila prava vrijednost mjerene veličine, a ima istu vrijednost kao apsolutna greška sa suprotnim predznakom.

RELATIVNA GREŠKA

- Veoma često se umjesto apsolutne greške koristi relativna greška, koja definiše odnos apsolutne greške i prave/tačne vrijednosti mjerene veličine, kako bi stekli utisak o stepenu tačnosti:

$$\delta_x = \frac{\hat{x} - x_t}{x_t} = \frac{\Delta_x}{x_t}$$

- Relativna procentualna greška je:

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{x_t} 100\%$$

- U praktičnim primjenama, s obzirom da prava/tačna vrijednost nije dostupna, a pod pretpostavkom da se prava i izmjerena vrijednost obično ne razlikuju značajno, u prethodnoj relaciji za relativnu grešku, prava vrijednost zamjenjuje se izmjerenom odnosno procijenjenom vrijednošću mjerene veličine.
- Problem sa relativnom greškom je što je nije moguće odrediti u slučaju kada je prava vrijednost zapravo jednaka nuli.

RELATIVNA GREŠKA

- Osim u odnosu na nominalnu tj. referentnu mjerenu vrijednost, apsolutna razlika se može posmatrati i u odnosu na srednju vrijednost procijenjene i tačne vrijednosti: $$\delta_x = \frac{\hat{x} - x_t}{\left(\frac{\hat{x} + x_t}{2}\right)}$$

- ili u odnosu na veću vrijednost: $$\delta_x = \frac{\hat{x} - x_t}{\max(\hat{x}, x_t)}$$

- Osim apsolutne i relativne greške, nekada se računa i opseg u kome se nalazi neka mjerena veličina. Opseg predstavlja razliku između maksimalne i minimalne vrijednosti mjerenja:

$$opseg = x_{\max} - x_{\min}$$

- Za sve navedene greške mogu se koristiti i zapisi koji podrazumijevaju korišćenje apsolutne vrijednosti :

$$\Delta_x = \left|\hat{x} - x_t\right| \qquad \delta_x = \frac{\left|\hat{x} - x_t\right|}{x_t}$$

IZVEDENA GREŠKA

- Izvedena greška mjerenja određuje se tako što se u relaciji za relativnu grešku umesto prave vrijednosti mjerene veličine koristi određena propisana vrijednost mjerene veličine.
- Propisane vrijednosti date su kao podaci na samoj mjeri, na indikatoru mjernog instrumenta, ili u priloženoj dokumentaciji datog mjerila.
- Propisane vrijednosti su najčešće:
  - nominalna vrijednost materijalizovane mjere;
  - gornja granica mjernog opsega, ako je oznaka nulte vrijednosti na kraju ili izvan opsega mjerenja;
  - suma modula granica mjerenja, ako je oznaka nulte vrijednosti unutar opsega mjerenja;
  - dužina skale ili njenog dijela, odgovara opsegu mjerenja, ako je skala nelinearna (kao, na primjer, kod om-metra u klasičnom multimetru);
  - nominalna vrijednost mjerene veličine, ako je takva ustanovljena (na primjer, za električnu mrežu, 220V ili 380V, 50Hz);

KLASA TAČNOSTI

- Klasa tačnosti instrumenta je dozvoljena izvedena relativna greška, dobijena ovjerom tih mjernih instrumenata sa odgovarajućim mjernim standardima. Klasa tačnosti mjernog instrumenta je istaknuta na samom instrumentu i definisana je u odnosu na granične vrijednosti apsolutne greške mjernog opsega instrumenta:

$$k_t = \frac{\Delta x_{\max}}{x_{pr}} 100$$

$\Delta x_{\max}$ maksimalna apsolutna greška ostvarena prilikom ovjere instr.

x_{pr} propisana vrijednost

- Ako je propisana vrijednost **gornja granica mjernog opsega M** - vrijednost pune skale:

$$k_t = \frac{\Delta x_{\max}}{M} 100$$

- U praksi je preporučljivo da se kod instrumenata sa analognom skalom rezultat mjerenja očitava u gornjoj trećini skale mjernog opsega.
- Proizvođač navodi podatak o klasi tačnosti na samom instrumentu, odnosno daje podatak o maksimalnoj apsolutnoj grešci koju instrument pravi na nekom mjernom opsegu M.
- Svi mjerni instrumenti svrstani su u 8 klasa tačnosti koje se označavaju indeksima 0.05; 0.1; 0.2; 0.5; 1; 1.5; 2.5 i 5.

Zadatak 1.10. Odrediti relativnu procentualnu grešku pri mjerenju snage ako je vatmetar sa 150 d. sk., klase tačnosti 0,5, naponskog područja 300 V, strujnog područja 10 A i cosφ=0,1 pokazao otklon 120 d. sk.

$$U_{\max} = 300V, \quad I_{\max} = 10\,A, \quad \alpha_{\max} = 150\ d.sk., \quad k_t = 0.5, \quad \alpha = 120\ d.sk.$$

$$k_t = \frac{\Delta P_{\max}}{M}100 = \frac{\Delta P_{\max}}{P_{\max}}100$$

$\Delta P_{\max}$ je max. aposolutna greška pri mjerenju snage, a Pmax mjerni domet vatmetra odnosno M

$$P_{\max} = U_{\max} I_{\max} \cos\varphi$$
$$= 300 \cdot 10 \cdot 0.1 = 300W$$

Umax i Imax su gornje granice (mjerni domet) naponskog odnosno strujnog područja

$$C_W = \frac{P_{\max}}{\alpha_{\max}} = 2\ W / d.sk. \longrightarrow$$

Konstanta vatmetra se računa kao mjerni domet vatmetra kroz ukupnu dužinu skale odnosno α_{max}

Watmetra je pokazao snagu (izmjerena snaga odnosno procijenjena):

$$P = C_W \alpha = 2W / d.sk. \cdot 120\, d.sk. = 240W$$

Apsolutna greška pri mjerenju snage je:

$$\Delta P_{\max} = \pm \frac{k_t P_{\max}}{100} = \pm \frac{0.5 \cdot 300}{100} = \pm 1.5W$$

Procentualna relativna greška je zatim:

$$\delta_P = \pm \frac{\Delta P_{\max}}{P} 100\% = \pm \frac{1.5}{240} 100 = 0.625\%$$

Primjeri

Zadatak 1 : Na voltmetru mjernog opsega 150 V izmjeren je napon 112 V, a prava vrijednost mjernog napona je 112.4 V. Koliko iznose apsolutna i relativna pogreška , korekcija, te pogreška u postotcima dogovorne vrijednosti ?

$$U_{iz} = \hat{x} = 112V$$

$$U_t = x_t = 112.4V$$

$$\Delta_x = \hat{x} - x_t = 112 - 112.4 = -0.4V$$

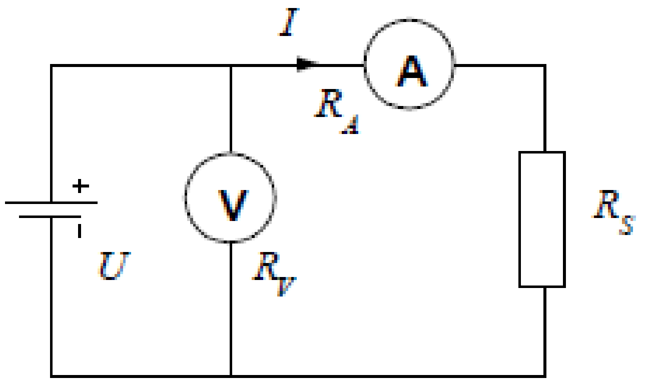
$$korek = 0.4V$$

$$\delta_x = \frac{\hat{x} - x_t}{x_t} = \frac{112 - 112.4}{112.4} = -0.00356$$

$$\delta_x = \frac{\hat{x} - x_t}{150} 100 = \frac{112 - 112.4}{150} 100 = -0.267\%$$

Primjeri

Zadatak 2 : Pri određivanju otpora U-I metodom, izmjeren je napon U =10 V i struja I = 1 A. Kolika je sistemska greška, ako je R_A =0.1Ω, a R_V = 20M Ω ?



$$R_x = \frac{U}{I} = 10\,\Omega,$$

$$U = I(R_A + R_s) \Rightarrow R_s = \frac{U}{I} - R_A = 10\,\Omega - 0.1\,\Omega = 9.9\,\Omega$$

$$\delta = \frac{Rx - Rs}{Rs} 100 = 1.01\%$$

Srednja vrijednost i standardna devijacija

- Kako bismo smanjili uticaj slučajnih grešaka, najvjerojatnija vrijednost mjerenja određuje se kao aritmetička sredina odnosno srednja vrijednost skupa pojedinačnih mjerenja.
- Ako je izvršeno *n* mjerenja, i ako su vrijednosti pojedinačnih mjerenja redom $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onda je aritmetička sredina pojedinačnih rezultata:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Za računsku ocjenu preciznosti mjerenja odnosno međusobnog odstupanja rezultata mjerenja, procjenjuje se srednja kvadratna greška odnosno standardna devijacija s:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

srednja kvadratna greška aritmetičke sredine je:

$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Standardna devijacija aritmetičke sredine

- Kako za rezultat mjerenja uzimamo aritmetičku sredinu pojedinačnih mjerenja, onda se procjenjuje kolika je srednja kvadratna greška aritmetičke sredine, odnosno standardna devijacija aritmetičke sredine:

$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ srednja kvadratna greška aritmetičke sredine je:

- Posmatrajmo skup Y ima opšti član $y_{ij}=u_i+v_j$ (i=1,2,…n; j=1,2,…k), gdje su u_i i v_j opšti članovi nezavisnih skupova $u_1, u_2, \ldots, u_n$ i $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Standardne devijacije ovih skupova su definisane kao:

$$s_u = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2} \qquad s_v = \sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(v_i - \overline{v})^2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i,j}(y_{ij} - \overline{y})^2} \approx \sqrt{\frac{1}{nk}\sum_{i,j}(y_{ij} - \overline{y})^2}$$

Standardna devijacija aritmetičke sredine

$$s_y^2 = \frac{1}{nk}\sum_{i,j}(y_{ij} - \bar{y})^2 = \frac{1}{nk}\sum_{i,j}(u_i + v_j - \bar{u} - \bar{v})^2 \quad gdje\ \ je \quad \bar{y} = \bar{u} + \bar{v}$$

$$\sum_{i,j}(u_i - \bar{u} + v_j - \bar{v})^2 = \sum_{i,j}(u_i - \bar{u})^2 + 2\sum_{i,j}(u_i - \bar{u})(v_j - \bar{v}) + \sum_{i,j}(v_j - \bar{v})^2$$

$$\sum_{i,j}(u_i - \bar{u})^2 = k\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2 = k(n-1)s_u^2 \approx kns_u^2$$

$$\sum_{i,j}(v_j - \bar{v})^2 = n\sum_{j=1}^{k}(v_j - \bar{v})^2 = n(k-1)s_v^2 \approx kns_v^2$$

$$\sum_{i,j}(u_i - \bar{u})(v_j - \bar{v}) = \sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})\sum_{j=1}^{k}(v_j - \bar{v})$$

$$s_y^2 = s_u^2 + s_v^2$$

Za više skupova bilo bi više članova na kvadrat

Standardna devijacija aritmetičke sredine

$$Kako\ \ je \qquad \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + .. + \frac{x_n}{n}$$

$$s_{x1} = s_{x2} = \ldots = s_{xn} = s$$

standardna devijacija pojedinačnog rezultata iznosi s, standardna devijacija sabiraka

$$Slijedi \qquad s_{\overline{x}}^2 = \left(\frac{s}{n}\right)^2 + \left(\frac{s}{n}\right)^2 + .. + \left(\frac{s}{n}\right)^2 = n\left(\frac{s}{n}\right)^2$$

$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

- **Zadatak 3:** ***Na uzorku od 10 otpornika izvršeno je mjerenje otpora. Kolika je aritmetička srednja vrijednost, standardna devijacija pojedinačnih mjerenja i standardna devijacija aritmetičke sredine ?***

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_i(\Omega)$	9.70	9.80	9.99	9.95	9.76	9.81	10.19	10.17	9.93	10.27

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i = 9.957\Omega$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2} = 0.197\Omega$$

$$s_{\bar{R}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.062\,\Omega$$